TEMA 1

POTENCIAS Y RAÍCES

Criterios De Evaluación de la Unidad

1. Operar con potencias y expresar el resultado en forma de potencia.
2. Expresar cantidades como producto de un número por una potencia de 10.
3. Calcular potencias de base entera y exponente natural.
4. Obtener raíces cuadradas por descomposición en factores primos.
5. Aplicar el cálculo mental para aproximar adecuadamente el valor de una raíz cuadrada.
6. Utilizar la calculadora científica para calcular potencias y raíces cuadradas.
7. Reconocer y valorar la presencia y la necesidad del lenguaje numérico en la vida cotidiana.

INDICE

1. POTENCIAS

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

Los elementos que constituyen una **potencia** son:

- La **base** de la potencia es el **número que multiplicamos por sí mismo**, en este caso el 6.
- El **exponente** de una potencia indica el número de **veces que multiplicamos la base**, en el ejemplo es el 5.

Ana recibe un SMS. Antes de un minuto ya lo ha reenviado a sus amigos Benito, Carla y Laura. Cada uno de sus amigos, antes de un minuto, reenvía este SMS a tres amigos más. Cada uno de los nueve, antes de un minuto lo reenvía a tres compañeros más. SI todas las personas que reciben el SMS son personas diferentes y cada una lo envía a tres personas antes de que pase un minuto ¿cuántas personas recibirán el SMS a los 5 minutos?

- *En el primer minuto reciben el SMS 3 personas, en el segundo minuto lo reciben 3·3=9 personas más y así sucesivamente.*
- *Al cabo de 5 minutos ha recibido el SMS:*

$$1+3+3\cdot3+3\cdot3\cdot3+3\cdot3\cdot3\cdot3+3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 364 \text{ personas.}$$

ESCRITURA DE POTENCIAS

Las potencias se escriben como un número llamado base y su exponente como un superíndice.

$$4 \times 4 \times 4 = \underbrace{\overset{\text{Base}}{4}{}^{\overset{\text{Exponente}}{3}}}_{\text{Potencia}}$$

De este modo el ejemplo anterior lo podríamos escribir de la siguiente forma:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$$

1.1. POTENCIAS DE BASE 10

Una **potencia de base 10** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente. Así:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 10 \cdot 10$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Las potencias de base 10 nos facilitan poder mostrar el **orden de magnitud** de números muy grandes.

Por ejemplo:

La distancia de la Tierra al sol es de 150 millones de kilómetros. Escribe esta cifra como producto de un número por una potencia en base 10.

$$150.000.000 = 150 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 150 \cdot 10^7 \text{ km}$$

1.2. Operaciones con potencias

Potencias con la misma base

Multiplicación	División
$7^2 \times 7^3 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 7^{2+3}$	$11^7 : 11^4 = \dfrac{\cancel{11} \times \cancel{11} \times \cancel{11} \times \cancel{11} \times 11 \times 11 \times 11}{\cancel{11} \times \cancel{11} \times \cancel{11} \times \cancel{11}} = 11 \times 11 \times 11 = 11^3 = 11^{7-4}$
El **producto de potencias** con la **misma base** es otra potencia con la mima base cuyo exponente es la **suma de los exponentes**	El **cociente de potencias** con la **misma base** es otra potencia con la misma base cuyo exponente es la **diferencia de los exponentes.**
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n : a^m = a^{n-m}$

Existen dos casos particulares de potencias:

Potencia de exponente 0	Potencia de exponente 1
$7^4 : 7^4$	$7^4 : 7^3$
$\dfrac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}} = 1$	$\dfrac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}} = 7$
$7^4 : 7^4 = 7^{4-4} = 7^0 = 1$	$7^4 : 7^3 = 7^{4-3} = 7^1 = 7$
Cualquier **potencia de exponente 0** es igual a 1.	Cualquier **potencia de exponente 1** es igual a la base.
$a^0 = 1$	$a^1 = a$

Potencias con el mismo exponente

Potencia de un producto	Potencia de un cociente
$(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$	$(12:6)^3 = (12:6) \cdot (12:6) \cdot (12:6) = 12^3 : 6^3$
La **potencia de un producto** de varios factores es el **producto de las potencias**.	La **potencia de un cociente** es el **cociente de las potencias.**
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(a : b)^n = a^n : b^n$

Potencia de una potencia

Potencia de una potencia
$\left(4^2\right)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2\cdot 3} = 4^6$ Al **elevar una potencian** a un exponente resulta una nueva potencia con la misma base, cuyo exponente es igual al **producto de los exponentes.** ***$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$***

1.3. Potencias de números enteros

Potencia de base negativa

Potencia de base negativa
$(-6)^2 = (-6)\cdot(-6) = 36$ $(-3)^{-5} = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243$ • Si la **base** es **negativa** y el **exponente** es **par**, el resultado es positivo. • Si la **base** es **negativa** y el **exponente impar**, el resultado es negativo ***$(-a)^{par}$= signo positivo*** ***$(-a)^{impar}$= signo negativo***

Como vemos en el cuadro anterior **ahora la base tiene signo**, por lo que lo primero y más importante va a ser siempre determinar **cuál va a ser el signo final de la potencia**.

Para ello habrá que **tener muy presente la regla de los signos** para el producto y el cociente, **fijarse** además en **si el exponente es par o impar** y por último en **si el exponente afecta a toda la base**, incluido el signo, **o si no afecta al signo**, esto podemos entenderlo a través de esta serie de ejemplos:

- $(-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$, **el exponente afecta al signo** y **es par**, resultado **positivo**.

- $-1^2 = -1 \cdot 1 = -1$, **el exponente no afecta al signo** (el signo no está dentro de un paréntesis afectado por el exponente) y **es par**, resultado **negativo**.

- $(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$, **el exponente afecta al signo** y **es impar**, resultado **negativo**.

- $-1^3 = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$, **el exponente no afecta al signo** y **es impar**, resultado **negativo**.

- $(-1)^4 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$, el exponente afecta al signo y es par, resultado positivo.

- $-1^4 = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$, el exponente no afecta al signo y es par, resultado negativo.

Potencia de exponente negativo

Potencia de exponente negativo
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
• Una **potencia** de **exponente negativo** es igual a la **unidad entre** la misma **potencia** con el **exponente positivo**
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Potencia de exponente y base enteros (es decir que pueden tener signo los dos)

Son aquellas en las que **tanto la base como el exponente** son números enteros, y por lo tanto ambos **vienen dotados de signo**.

El significado del signo de la base y los cuidados que con él hay que adoptar ya han sido tratados, ahora debemos saber **qué significado tiene el signo del exponente**.

Veamos qué ocurre con el siguiente cociente de potencias de igual base:

$\frac{3^3}{3^4} = 3^{3-4} = 3^{-1}$, por otro lado, haciendo la simplificación de los factores de la fracción $\frac{3^3}{3^4} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3} = \frac{1}{3}$, como ambos resultados deben coincidir, entonces $3^{-1} = \frac{1}{3}$, es decir, el signo del exponente nos indica si la base está donde debe estar o no, así si el exponente es positivo indica que la base está bien donde está, y si es negativo indica que está cambiada de sitio.

Ejemplos:

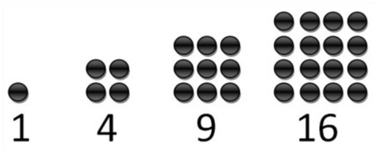
$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(5^{-1}\right)^3 = 5^{-3}$$

- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{5^{-2}} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^{-2}} = \frac{5^2}{2^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, es decir, en el caso de una fracción o de la potencia de exponente negativo de un cociente, ésta se transforma en la potencia de exponente positivo del inverso del cociente o de la inversa de la fracción.
- $\frac{1}{3^{-4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = (3)^4 = 3^4$, de modo rápido e intuitivo, lo más rápido es cambiar de sitio a la base cambiando a su vez el signo del exponente.

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^2}{2^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$, ojo, la regla de signos para la base es independiente del signo del exponente, solo depende de si éste es par o impar.
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\frac{3^3}{2^3}=-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$
- $\left(-2^2\right)^{-3}=-2^{-6}=\frac{-1}{2^6}$
- $\left(-2^3\right)^{-2}=2^{-6}=\frac{1}{2^6}$, ya que $(-1)^{-2}=\left(\frac{1}{-1}\right)^{2}=\frac{1^2}{(-1)^2}=\frac{1}{1}=1$

CUADRADOS PERFECTOS

Observa las siguientes figuras:



Es fácil deducir que:

$1 = 1^2$	$9 = 3^2$	$25 = 5^2$
$4 = 2^2$	$16 = 4^2$	$36 = 6^2$

Un **cuadrado perfecto** es aquel número que se obtiene de **elevar al cuadrado un número natural**.

Luego los números 1, 4, 9, 16, 25 y 36 son cuadrados perfectos.

2. RAÍCES CUADRADAS

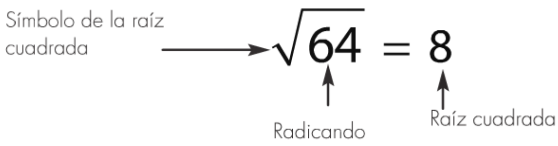
¿De qué número procede el cuadrado perfecto 484?

Parece una respuesta difícil, pero no lo es. Existe una operación que es inversa a las potencias que se llama **raíz.**

La **raíz cuadrada** de un número natural *a* es otro número natural *b* tal que elevado al cuadrado sea igual al número dado *a.*

$$\sqrt{a}=b \quad \Rightarrow \quad b^2=a$$

Los elementos dela raíz cuadrada son:



2.1. Clases de raíces

Existen distintos tipos de raíces cuadradas, según el radicando sea cuadrado perfecto o no.

RAÍZ CUADRADA EXACTA

Es aquella raíz que al calcular su resultado da un número exacto, sin decimales. Por ejemplo:

$$\sqrt{64} = 8 \quad \textit{ya que } 8^2 = 64 \ \textit{ y además } (-8)^2 = 64$$

$$\textit{Por lo tanto } \sqrt{64} = \pm 8$$

RAÍZ CUADRADA ENTERA

Cuando queremos realizar la raíz cuadrada de un número, que no es cuadrado perfecto, nos dará como resultado un número decimal, entonces es una raíz entera.

En este caso, aproximaremos el resultado de la raíz entre dos números naturales. **El resto de una raíz cuadrada entera** de un número es igual a la diferencia del número y el cuadrado de su raíz entera, y es un número menor que el doble de su raíz más 1.

$$\mathrm{R}R < 2 \cdot r + 1$$

Por ejemplo:

Vamos a calcular $\sqrt{76}$.

76 no es un cuadrado perfecto. Pero se aproxima a $8^2 = 64$ *y a* $9^2 = 81$*, por lo tanto escribiremos que:*

$$\sqrt{64} < \sqrt{76} < \sqrt{81}$$
$$8 < \sqrt{76} < 9$$

Por tanto, la raíz cuadrada de 76 es 8, y el resto es $76 - 8^2 = 12$.

Observamos que $12 < 2 \cdot 8 + 1$

<u>Raíces cuadradas de números enteros</u>
Los pasos para llevar a cabo una raíz cuadrada son los siguientes:

Paso 1: Si el radicando tiene más de dos cifras, separamos las cifras en grupos de dos empezando por la derecha.

$$\sqrt{8\ 92\ 25}$$

Paso 2: Calculamos la raíz cuadrada entera o exacta, del primer grupo de cifras por la izquierda.

¿Qué número elevado al cuadrado da 8?

8 no es un cuadrado perfecto pero está comprendido entre dos cuadrados perfectos: 4 y 9, entonces tomaremos la raíz del cuadrada del cuadrado perfecto por defecto: 2, y lo colocamos en la casilla correspondiente.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\ 8\ 92\ 25\ } & \underline{2} \end{array}$$

Paso 3: El cuadrado de la raíz obtenida se resta al primer grupo de cifras que aparecen en el radicando.

El cuadrado de 2 es 4. Se lo restamos a 8 y obtenemos 4.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\ 8\ 92\ 25\ } & \underline{2} \\ \underline{-4} & \\ \ \ 4 & \end{array}$$

Paso 4: Detrás del resto colocamos el siguiente grupo de cifras del radicando, separando del número formado la primera cifra a la derecha y dividiendo lo que resta por el duplo de la raíz anterior.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\ 8\ 92\ 25\ } & \underline{2} \\ \underline{-4} & \\ \ \ 49\ \ 2 & \end{array}$$

Bajamos 92, siendo la cantidad operable del radicando: 492.

49: 4 > 9, tomamos como resultado 9.

Paso 5: El cociente que se obtenga se coloca detrás del duplo de la raíz, multiplicando el número formado por él, y restándolo a la cantidad operable del radicando.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{8\ 92\ 25} & \underline{2} \\
\underline{-4} & \underline{49 \times 9 = 441} \\
\quad 49\ 2 &
\end{array}$$

Si hubiésemos obtenido un valor superior a la a la cantidad operable del radicando, habríamos probado por 8, por 7... hasta encontrar un valor inferior.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{8\ 92\ 25} & \underline{2} \\
\underline{-4} & \underline{49 \times 9 = 441} \\
\quad 492 & \\
\quad \underline{441} & \\
\qquad 51 &
\end{array}$$

<u>Paso 6</u>: El cociente obtenido es la segunda cifra de la raíz.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{8\ 92\ 25} & \underline{29} \\
\underline{-4} & \underline{49 \times 9 = 441} \\
\quad 492 & \\
\quad \underline{441} & \\
\qquad 51 &
\end{array}$$

<u>Paso 7</u>: Bajamos el siguiente par de cifras y repetimos los pasos anteriores.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{8\ 92\ 25} & \underline{29} \\
\underline{-4} & \underline{49 \times 9 = 441} \\
\quad 492 & \underline{589 \times 9 = 5301} \\
\quad \underline{441} & \\
\qquad 512\ 5 &
\end{array}$$

Como 5301 > 5125, probamos por 8.

$\sqrt{8\ 92\ 25}$	29
-4	$49 \times 9 = 441$
492	$588 \times 8 = 4704$
441	
5125	
4704	
421	

Subimos el 8 a la raíz

$\sqrt{8\ 92\ 25}$	298
-4	$49 \times 9 = 441$
492	$588 \times 8 = 4704$
441	
5125	
4704	
421	

¡OJO! Paso 8: Comprobación

Para que el resultado sea correcto, se tiene que cumplir:

Radicando= (Raíz entera)^2 + Resto

$89\,225 = 298^2 + 421$

$298^2 < 89225 < 299^2$